

УДК 519.711.3

**ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОЧАСТОТНОГО КВАНТОВАНИЯ  
В ЦИФРОВЫХ СИСТЕМАХ МОНИТОРИНГА И  
УПРАВЛЕНИЯ**

*В. Я. Карташов, И. В. Бехтгольд*

**APPLICATION OF MULTI-FREQUENCY QUANTIZATION IN DIGITAL SYSTEMS  
OF MONITORING AND CONTROL**

*V. Y. Kartashov I. V. Bekhtgold*

*В статье предлагается один из подходов построения дискретной модели многомерного динамического объекта, удовлетворяющей принципу суперпозиции и использующей многочастотное квантование.*

*The article proposes an approach to constructing a multidimensional discrete model of a dynamic object that satisfies the principle of superposition, using multi-frequency quantization.*

**Ключевые слова:** *многочастотное квантование, дискретная модель, цифровые системы, непрерывные дроби, многомерные динамические объекты.*

**Keywords:** *multi-frequency quantization, discrete model, digital systems, continued fractions, multidimensional dynamic objects.*

В цифровых системах реального времени в общем случае часто целесообразно иметь несколько квантующих устройств, которые практически трудно синхронизировать, а в большинстве случаев и необязательно стремиться к этому. Как отмечается в [7], к таким схемам квантования могут приводить многомерные системы контроля и управления со многими процессорами, системы со специальными элементами передачи информации или реальных измерений и т. п. Квантование в цифровых системах, осуществляемое с разными периодами дискретизации, получило название многочастотного квантования.

Успешное применение достижений теории цифровых систем при анализе и синтезе использования совокупности асинхронно выполняющихся процессов наталкивалось на невозможность исследования всей системы как единого целого. Это было обусловлено тем, что принципиально не был решен вопрос о сопоставлении таких процессов в однородных условиях, в частности, отсутствовало теоретическое обоснование перехода к синхронному анализу и синтезу таких процессов. В работе [7] упомянут подход для частного случая, когда отношения периодов дискретизации являются рациональными числами. В этом случае нетрудно показать существование «фундаментального» (основного) периода дискретизации и выразить все остальные периоды кратными этому периоду.

Для синхронизации процессов дискретизации и, тем самым, реализации многочастотного квантования, необходимо исследовать влияние вариации периода дискретизации  $\Delta t$  на математическую модель объекта и определить условия соответствия модели объекту. Прежде всего предположим, что объект моделирования является линейным или допускающим линеаризацию непрерывной динамической моделью. Пусть  $\Delta t_\nu$  – некоторое значение периода дискретизации из числового множества  $(0, \Delta t)$ . Каждое  $\Delta t_\nu$  определяет разбиение временного интервала динамического процесса  $M_\nu = \{k \cdot \Delta t_\nu, k = 0, N_\nu\}$ . При разных  $\Delta t_\nu$  получим множество разбиений  $\{M_\nu\}$  временного интервала  $[0; T)$ . Тогда будем говорить о соответствии дискретных моделей непрерывному объекту, если при фиксированном входном воздействии  $x(t)$  существуют такие разбиения  $\{M_\nu\}$ , что для любого малого  $\delta > 0$  выполняются соотношения на разбиениях:

$$|\delta(y(t), y^M(t))| < \delta, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} |\delta(y(t), y^M(t))| &= \\ &= \max_{M_\nu} |y(k\Delta t_\nu) - y^M(k\Delta t_\nu)|, \end{aligned} \quad (2)$$

$\Delta t_\nu \in (\Delta t_1; \Delta t_2)$ ;  $y(t)$ ,  $y^M(t)$  – выходная переменная объекта и модели соответственно. Эти требования соответствуют равномерной близости переходных процессов для  $\Delta t_\nu \in (\Delta t_1; \Delta t_2)$  и определяют абсолютную погрешность на временном интервале  $[0; T)$ .

Для удовлетворения указанным условиям (1), (2) исследованы и установлены следующие взаимосвязи и соотношения [2, с. 5].

Установлено взаимнооднозначное соответствие между основной полосой  $s$ -плоскости преобразования Лапласа непрерывной передаточной функцией (НПФ) и  $z$ -плоскостью дискретной передаточной функцией (ДПФ), которое принципиально возможно только лишь при преобразовании  $z = e^{s \cdot \Delta t}$ , где  $\Delta t$  - период дискретизации в единицах времени (ед. врем.). При этом в силу многозначности отображения возникает необходимость построения римановой поверхности над  $z$ -плоскостью.

Применение согласованного  $z$ -преобразования при фиксированных нулях и полюсах НПФ в  $s$ -плоскости при вариации  $\Delta t$  в определенных пределах, позволяет взаимнооднозначному множеству нулей и полюсов ДПФ сохранить селективные свойства непрерывного объекта. Именно эти свойства позволяют рассмотреть бинарное отношение «быть моделью» как эквивалентное отношение [6]. В частности, это отношение обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Выполнение первых двух свойств хорошо известно в моделировании в качестве понятия адекватности модели объекту, которое в достаточной степени разработано и используется на практике. В то же время свойство транзитивности, приводящее к появлению множества дискретных моделей, не реализовано на практике [5, с. 40 – 44].

Для реализации свойства транзитивности бинарного отношения «быть моделью» необходимо разработать формализованную процедуру нахождения ДПФ по измерениям входных и выходных переменных с периодом дискретизации  $\Delta t$ . При этом возникает следующая задача в детерминированном случае (измерения входных и выходных переменных объекта осуществляются без погрешностей):

- дано: результаты измерений в равноотстоящие моменты времени  $\{x(n\Delta t); y(n\Delta t)\}$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;
- требуется: определить дробно-рациональное приближение ДПФ динамического объекта, обладающее свойством интерполяционной зависимости.

Другими словами ДПФ определяем как отношение  $z$ -преобразований выходной переменной и входной переменной:

$$G_d(z, \Delta t) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} y_n \cdot z^{-n}}{\sum_{n=0}^{\infty} x_n \cdot z^{-n}}. \quad (3)$$

Для отыскания ДПФ  $G_d(z, \Delta t)$  требуется алгоритм совместной обработки приведенных в (3) временных рядов, так как в этом случае осуществляется оценка индивидуальных свойств динамического объекта. Всем указанным требованиям удовлетворяют алгоритмы теории непрерывных дробей [8], а именно, алгоритм В. Вискватова и его конкретизация к условиям задачи – модифицированный алгоритм В. Вискватова, которые являются основой подхода структурно-параметрической идентификации (SP-идентификации). Эти алгоритмы будут приведены далее при решении тестовых примеров.

Очевидно, что для любых значений периодов дискретизации  $\Delta t$  обсуждаемая здесь задача не имеет решения. Теоретическое исследование и решение многочисленных модельных и реальных задач позволили сформулировать дополнительные условия SP-идентифицируемости [2]:

Если предположить, что кроме действительных нулей и полюсов НПФ существуют комплексно-сопряженные, то мнимые части характеристических точек НПФ должны удовлетворять соотношению:

$$\Delta t \cdot \max \left( \text{Im}[s_1^H, s_2^H, \dots, s_m^H, s_1^n, s_2^n, \dots, s_n^n] \right) < \pi, \quad (4)$$

где  $\Delta t$  – величина шага дискретизации, причем алгоритмы SP-идентификации восстанавливают и ДПФ и НПФ с определением их порядков и значений характеристических точек.

Замечание: для апериодических объектов приближенные условия SP-идентифицируемости несколько другие [8, с. 1].

Таким образом, сформулированные выше положения позволяют сформулировать утверждение, что для динамических объектов, рассматриваемых в работе, существует интервал значений периодов дискретизации  $(\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$ , зависящий от динамических свойств объекта, такой, что для любых  $\Delta t \in (\Delta t_{\min}, \Delta t_{\max})$  определяются ДПФ и НПФ объекта, а, следовательно, выполняется условие транзитивности. В этом случае дискретные модели объекта получили название эквивалентных моделей.

Пример, иллюстрирующий понятие эквивалентных дискретных моделей. Как правило, в данном случае рассматривается одномерный динамический объект с входной  $x(t)$  и выходной  $y(t)$  переменными. Для цифровых систем при идентификации объектов, выбирается ступенчатый идентифицирующий сигнал

$x(t) = 1(t)$ , определяющий переходную характеристику объекта. Заметим, что при идентификации одномерного канала в многомерном объекте создаются условия или выбираются режимы постоянства других входных режимов. При проведении экспериментов по определению переходных характеристик можно экспериментально проверить справедливость свойства суперпозиции или оценить величину допустимых воздействий такого предположения.

В качестве динамического объекта рассмотрим аperiodический объект с НПФ  $G(s) = \frac{2}{3 \cdot s + 2}$ , параметры которого: коэффициент усиления  $k = 1$  и постоянная времени  $T = \frac{3}{2}$ . На вход подаем ступенчатый сигнал  $x(t) = 1(t)$ , период дискретизации  $\Delta t = 1,2$  ед. врем. Получив результаты измерений, определяем идентифицирующую матрицу со структурой:

<i>Строка времени</i>	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	...
<i>Значение входа (0 – строка)</i>	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$	$x(4)$	...
<i>Значение выхода (1 – строка)</i>	$y(0)$	$y(1)$	$y(2)$	$y(3)$	$y(4)$	...
<i>Элементы матрицы</i>	$\alpha_2(0)$	$\alpha_2(1)$	$\alpha_2(2)$	$\alpha_2(3)$	$\alpha_2(4)$	...
	$\alpha_3(0)$	$\alpha_3(1)$	$\alpha_3(2)$	$\alpha_3(3)$	$\alpha_3(4)$	...
	...	...	...	...	...	...
	$\alpha_m(0)$	$\alpha_m(1)$	$\alpha_m(2)$	$\alpha_m(3)$	$\alpha_m(4)$	...
	$\alpha_{m+1}(0)$	$\alpha_{m+1}(1)$	$\alpha_{m+1}(2)$	$\alpha_{m+1}(3)$	$\alpha_{m+1}(4)$	...

(5)

*Замечание 1.* Элементы матрицы определяются по соотношению:

$$\alpha_m(n) = \frac{\alpha_{m-2}(n+1)}{\alpha_{m-2}(0)} - \frac{\alpha_{m-1}(n+1)}{\alpha_{m-1}(0)},$$

$$\alpha_0(n) = x(n), \alpha_1(n) = y(n).$$

*Замечание 2:* Если первые элементы строк нулевые, то осуществляется сдвиг строки влево до появления ненулевых элементов, при этом элемент сдвигаемой строки в непрерывной дроби умножается на  $z^{-k}$  ( $k$  - число нулей).

*Замечание 3:* Если элементы какой-либо  $(m+1)$  строки – нулевые, то расчеты прекращаются, первый столбец определяет конечную непрерывную дробь:

$$G(z, \Delta t) = \frac{y(0)}{x(0) + \alpha_2(0) \cdot z^{-1} + \dots}$$

$$\dots + \frac{1}{\alpha_m(0) \cdot z^{-1}},$$

(7)

сворачивая которую снизу-вверх, определяем ДПФ объекта, его характеристические свойства и дискретную математическую модель.

В примере при  $\Delta t = 1,2$  ед. врем. идентифицирующая матрица:

$t$	0	1,2	2,4	3,6	4,8
$x$	1	1	1	1	1
$y$	0,55	0,8	0,91	0,96	–
$\alpha_1$	–0,454545	–0,654545	–0,745455	–	–
$\alpha_2$ ("0" – строка)	0,01	0,01	–	–	–

Тогда  $G(z; 1,2) = \frac{0,55 \cdot z^{-1}}{1 - 0,45 \cdot z^{-1}}$  из которой имеем  $z^n = 0,45$ ;  $s^n = -0,67$ ;

$$G_n(s) = \frac{1}{s + 0.67} \cong \frac{2}{3 \cdot s + 2}.$$

Изменим  $\Delta t = 0,5$  ед. врем., тогда идентифицирующая матрица:

$t$	0	0,5	1	1,5
$x$	1	1	1	1
$y$	0,28	0,49	0,63	0,74
$\alpha_1$	-0,71653	-1,229948	-1,597826	-
$\alpha_2$	$\approx 0$	$\approx 0$	-	-

Тогда ДПФ  $G(z; 0,5) \cong \frac{0.28 \cdot z^{-1}}{1 - 0,72 \cdot z^{-1}}$ , тогда  $z^n = 0,72$ ;  $s^n = -0,66$ ;

$$G_n(s) = \frac{1}{s + 0.66} \approx \frac{2}{3 \cdot s + 2}.$$

Из приведенных расчетов можно сделать вывод, что для любых  $\Delta t \in [0,5; 1,2]$  НПФ  $G_n(s)$  будет одна и та же (с точностью до погрешностей расчета), а ДПФ и дискретных моделей бесконечно много. Границы отрезка можно уточнить, выбрав  $\Delta t < 0,5$  или  $\Delta t > 1,2$  и используя поисковые методы.

В общем случае рассмотрим многомерный динамический объект, который допускает линеаризацию и имеет  $M$  входных воздействий  $x_m(t)$  и, не нарушая общности, одну управляемую (выходную) переменную  $y(t)$ .

Влияние входного воздействия  $x_m(t)$  на изменение выходной переменной  $y(t)$  при условии приближенного постоянства других входных воздействий условно назовем  $m$ -ым динамическим каналом объекта  $(x_m(t); y(t))$ . Предполагается, что квантование по времени динамических каналов можно осуществлять как отдельно, так и в совокупности. Требуется построить линейную модель рассматриваемого объекта, при условии отсутствия погрешностей измерения.

Решение поставленной задачи предполагает выполнение следующих этапов алгоритма.

1. Для каждого отдельного канала при условии, что на других каналах каким-либо образом поддерживались постоянные (приблизительно) уровни, осуществлялось ступенчатое возмущение с целью получения переходной характеристики канала.

2. С помощью цифровой техники (ПЛК, промышленные контроллеры и т. п.) осуществляется квантование по времени с периодом квантования  $\Delta t_m$ . Квантование может быть различным по характеру. Например, если  $\Delta t_m$  брать малым, то другие значения периодов дискретизации можно брать с помощью операции децимации. Возможен вариант независимого выбора значений  $\Delta t_m$ .

3. Таким образом, для каждого  $\Delta t_m$  имеются переходные характеристики

$$(x_m(k \cdot \Delta t_m); y(k \cdot \Delta t_m)),$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$

К полученным измерениям применяем алгоритм SP-идентификации (например, модифицированный алгоритм В. Висковатова). Находим по идентифицирующей матрице ДПФ  $G_m(z; \Delta t_m)$ . По полученной  $G_m(z; \Delta t_m)$  восстанавливаем  $G_m(s)$  и для этих передаточных функций находим их нули и полюса. Изменяем  $\Delta t_m = \Delta t_{m1}$  и повторяем предыдущие операции, определяем  $G_{m1}(\Delta t_{m1}; z)$  и  $G_{m1}(s)$  и их характеристические точки.

4. Для  $m$ -ного канала находим общую неизменяемую часть  $G_m(s)$ , имеющие одинаковые нули и полюса НПФ, а также оцениваем интервал значений периодов дискретизации  $(\Delta t_{m \min}; \Delta t_{m \max})$ . Это можно сделать с помощью поисковых методов, приближенных соотношений [7, 1] или комбинированных алгоритмов.

5. Определяем общий интервал значений периодов дискретизации для всех каналов динамического объекта, на котором выполняется эквивалентность дискретных моделей:

$$(\Delta t_{0\min}; \Delta t_{0\max}) = \bigcap_{m=1}^M (\Delta t_{m\min}; \Delta t_{m\max}).$$

Если  $(\Delta t_{0\min}; \Delta t_{0\max}) = \emptyset$ , то задача решений не имеет. В противном случае, выбираем требуемое значение периода  $\Delta t_0$  (возможен вариант выбора таких периодов квантования в виде некоторой совокупности).

6. Зная для каждого  $m$ -ного динамического канала  $G_m(s)$  и период  $\Delta t_0$ , с помощью модифицированного метода В. Висковатова, находим ДПФ  $G_m(\Delta t_0; z)$ .

7. Окончательный этап формирует характеристический многочлен многомерного объекта путем умножения и числителя и знаменателя ДПФ на недостающие члены  $(z - z^n)$ , где  $z^n$  находится из соотношения согласованного  $z$ -преобразования:

$$z_n = e^{s_n \cdot \Delta t}, \tag{8}$$

где  $s_n$  – недостающие до полного характеристического многочлена полюса модели.

Приведем тестовые исследования предложенного алгоритма для двумерного линейного динамического объекта. Пусть дан объект (рис. 1).

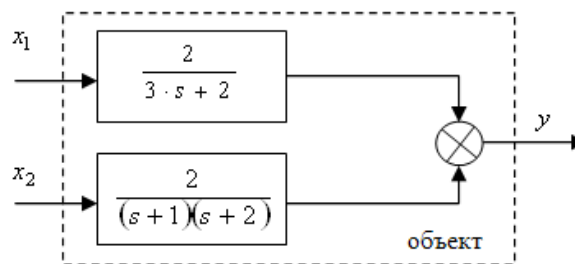


Рис. 1. Структурная схема тестового линейного объекта

Первый канал объекта  $(x_1(t); y(t))$  имеет передаточную функцию  $G_1(s) = \frac{2}{3 \cdot s + 2}$ . Рассматривается детерминированный случай. При идентификации первого канала период дискретизации был  $\Delta t_{11} = 1,2$  ед. врем. и  $\Delta t_{12} = 0,5$  ед. времени для второго канала  $\Delta t_{21} = 1$  ед. врем.,  $\Delta t_{22} = 0,5$  ед. времени. Требуется в общем случае построить дискретную модель и определить реакцию этого объекта на определенный вид входных сигналов. Для демонстрации возможностей подхода выбран объект, для которого уже часть расчетов проведены. В то же время все этапы алгоритма будут представлены в полном объеме.

В частности, первый канал ранее идентифицирован:

а) для  $t_{11} = 1,2$  ед. врем.

время		0	1,2	2,4	3,6	4,8
вход	$x_1(t)$	1	1	1	1	1
выход	$y(t)$	0	0,55	0,8	0,91	0,96

б) для  $t_{12} = 0,5$  ед. врем.

время		0	0,5	1	1,5	2
вход	$x_1(t)$	1	1	1	1	1
выход	$y(t)$	0,28	0,49	0,63	0,74	–

Анализ результатов идентификации приводит к выводу, что если период квантования  $\Delta t \in [0,5;1,2]$ , то бесконечное множество дискретных моделей эквивалентно динамическому объекту с непрерывной передаточной функцией  $G_1(s) = \frac{2}{3 \cdot s + 2}$  при входном ступенчатом воздействии  $x_1(t) = 1(t)$ .

Второй канал объекта  $(x_2(t); y(t))$  идентифицируется при периодах квантования  $\Delta t_{21} = 1$  ед. врем. и  $\Delta t_{22} = 0,5$  ед. врем.:

для  $\Delta t_{21} = 1$  ед. врем. идентифицирующая матрица имеет вид:

<i>время</i>		0	1	2	3	4	5
<i>вход</i> $x_2(t)$		1	1	1	1	1	1
<i>выход</i> $y(t)$	←	0	0,4	0,75	0,9	0,96	0,99
$\alpha_1$		0,399576	0,747645	0,902505	0,963704	0,98657	0,995049
$\alpha_2$		-0,871094	-1,259655	1,411815	-1,469038	-1,490259	-
$\alpha_3$		0,425034	0,638917	0,725386	0,758249	-	-
$\alpha_4$		-0,057155	-0,085916	-0,097543	-	-	-
		$\approx 0$	$\approx 0$	-	-	-	-

Так как последняя строка содержит элементы, величина которых близка к нулю, то далее расчеты не проводятся в соответствии со сформулированным правилом останова. Тогда ДПФ канала аппроксимируется элементами первого столбца полученной матрицы, порождающими конечную правильную С-дробь:

$$G_2(z;1) = \frac{0,399576z^{-1}}{1 + \frac{-0,871094z^{-1}}{1 + \frac{0,42503z^{-1}}{1 - 0,057153z^{-1}}}}$$

вернув которую алгоритмом «снизу-вверх» получаем ДПФ:

$$G_2(z;1) = \frac{0,399576z^{-1} + 0,146995z^{-2}}{1 - 0,503215z^{-1} + 0,049787z^{-2}} \cong \frac{0,4z^{-1} + 0,147z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} + 0,05z^{-2}}$$

Для  $\Delta t_{22} = 0,5$  ед. врем. идентифицирующая матрица с учетом входного ступенчатого воздействия  $1(t)$  примет вид (приводится без округления):

<i>время</i>		0	0,5	1	1,5	2	2,5
<i>вход</i> $x_2(t)$		1	1	1	1	1	1
<i>выход</i> $y(t)$		0,154818	0,399576	0,60327	0,747645	0,842508	0,902905
$\alpha_1$		-1,580941	-2,898295	-3,829183	-4,442308	-4,832034	-
$\alpha_2$		0,747668	1,476204	2,019269	2,385879	-	-
$\alpha_3$		-0,141139	-0,278725	-0,38118	-	-	-
		$\approx 0$	$\approx 0$	-	-	-	-

Аналогично предыдущему случаю получаем ДПФ:

$$G_2(z;0,5) = \frac{0,154818z^{-1} + 0,093901z^{-2}}{1 - 0,97441z^{-1} + 0,22313z^{-2}} \cong \frac{0,155z^{-1} + 0,094z^{-2}}{1 - 0,975z^{-1} + 0,223z^{-2}}$$

которая имеет отрицательный нуль  $z_1^n = -0,607$  и нуль  $z_1^n = 0$ , два полюса:  $z_1^n = 0,367879$  и  $z_2^n = 0,60653$  и, соответственно, в  $s$ -плоскости для данного объекта нулей нет, а полюса принимают значения  $s_1^n = -2$ ,  $s_2^n = -1$ . Дискретная модель в форме разностного уравнения восстанавливает значения выходной переменной с относительной погрешностью  $\Delta \leq 0,1\%$ . Заметим, что особенностью получения дробно-рациональной аппроксимации при ступенчатом воздействии в числителе появляются отрицательные нули, которые пока не удается восстановить на прогностической основе. Это требует определять их расчетным путем по алгоритму В. Висковатова.

Для построения двухмерной дискретной модели рассматриваемого объекта, сначала требуется выбрать синхронизированный период дискретизации из  $(\Delta t_{0\min}; \Delta t_{0\max})$  (соотношение (8)). Из условий задачи управления или задачи мониторинга для конкретного динамического объекта назначаем, например,  $\Delta t = 1$  ед. врем.

Для первого канала, в силу того, что это аperiodический объект первого порядка (так как нет необходимости искать нули в числителе), можно поступить следующим образом: из согласованного  $z$ -преобразования искомый  $z_n$  для  $\Delta t = 1$  ед. врем., находим из условия постоянства полюса для динамического объекта, т. е. так как  $s_n = 0,67$ , то  $\ln z_n = \frac{\Delta t}{\Delta t_1} \ln z_{n1}$ . В нашем случае  $\Delta t_1 = 1,2$  ед. врем.

$z_{n1} \cong 0,45$ ,  $\Delta t = 1$  ед. врем., тогда  $z_n \cong 0,51$ . Тогда из условия, что коэффициент передачи первого канала  $k_1 = 1$ , окончательно получаем  $(G_{(1;1)} = k_1 = 1)$ ,

$$G_1(z;1) \cong \frac{0,49z^{-1}}{1 - 0,51z^{-1}}, \quad (9)$$

а для второго канала уже имеется передаточная функция, полученная ранее:

$$G_2(z;1) \cong \frac{0,4z^{-1} + 0,147z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} + 0,05z^{-2}}. \quad (10)$$

Заметим, что если такого  $G_2(z;1)$  не было, то необходимо было перейти к НПФ, после чего найти переходную характеристику, а затем, с помощью алгоритма В. Висковатова, получить искомую ДПФ.

Тогда после операции синхронизации, осуществимой из свойства транзитивности условия эквивалентности дискретных моделей, получим общую модель объекта  $y(z;1) = y_1(z;1) + y_2(z;1)$ , где

$$\begin{aligned} y_1(z;1) &= G_1(z;1) \cdot x_1(z;1), \\ \text{а } y_2(z;1) &= G_2(z;1) \cdot x_2(z;1). \end{aligned}$$

Тогда, с учетом получения общего характеристического полинома объекта, получим:

$$\begin{aligned} y(z;1) &= \\ &= \frac{0,40z^{-1}(1 - 0,5z^{-1} + 0,05z^{-2})}{(1 - 0,51z^{-1})(1 - 0,5z^{-1} + 0,05z^{-2})} x_1(z;1) + \\ &+ \frac{(0,4z^{-1} + 0,47z^{-2})(1 - 0,51z^{-1})}{(1 - 0,5z^{-1} + 0,05z^{-2})(1 - 0,51z^{-1})} x_2(z;1) = \\ &= \frac{0,49z^{-1} - 0,245z^{-2} + 0,0245z^{-3}}{1 - 1,01z^{-1} + 0,305z^{-2} - 0,0255z^{-3}} x_1(z;1) + \\ &+ \frac{0,4z^{-1} - 0,057z^{-2} - 0,075z^{-3}}{1 - 1,01z^{-1} + 0,305z^{-2} - 0,0255z^{-3}} x_2(z;1). \end{aligned} \quad (11)$$

Для конкретизации результатов положим:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \begin{cases} 0,5 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}, \\ \text{а } x_2(t) &= \begin{cases} 2 & \text{при } t \geq 3 \\ 0 & \text{при } t < 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (12)$$

В этом случае дискретная математическая модель примет вид:

$$\begin{aligned}
 y(n) = & 1,01 \cdot y(n-1) - 0,305 \cdot y(n-2) + \\
 & + 0,0255 \cdot y(n-3) + \\
 & + 0,49 \cdot x_1(n-1) - 0,245 \cdot x_1(n-2) + \\
 & + 0,0245 \cdot x_1(n-3) + \\
 & + 0,4 \cdot x_2(n-1) - 0,057 \cdot x_2(n-2) - \\
 & - 0,075 \cdot x_2(n-3).
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Учитывая соотношения (12), получим следующие сопоставительные результаты (таблица 1).

Таблица 1

**Результаты расчетов**

Время	0	1	2	3	4	5	6	7
$x_1(t)$	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
$x_2(t)$	0	0	0	2	2	2	2	2
$y(t)$	0	0,243	0,368	0,432	1,264	1,977	2,297	2,423
$y^M(t)$	0	0,243	0,368	0,433	1,266	1,977	2,292	2,415

Как видно из приведенных результатов в таблице 1, максимальная относительная погрешность, определяемая из соотношения:

$$\Delta = \frac{|y(n) - y^m(n)|}{y(n)} 100\%,$$

не превосходит  $\Delta \leq 0,4\%$ , что связано с погрешностями округлений и расчетов.

Таким образом, в работе, прежде всего, предложен алгоритм использования бинарного отношения «быть моделью» и предложен механизм реализации свойства транзитивности множества дискретных моделей при вариации периода квантования по времени. Именно эти и другие свойства позволили ввести понятие эквивалентности дискретных моделей. В частности, неиспользование эквивалентности не позволяет в полной мере применять на практике многочастотное квантование в цифровых системах как один из подходов построения высокоэффективных систем.

**Литература**

1. Бехтгольд, И. В. Некоторые аспекты выбора шага дискретизации при идентификации линейных объектов / И. В. Бехтгольд, Д. Ю. Сахнин // Краевые задачи и математическое моделирование: тематический сборник научных статей. – Новокузнецк: НФИ ГОУ ВПО КемГУ, 2010. – Т. 3.
2. Карташов, В. Я. Влияние периода дискретизации на структурно-параметрическое взаимодействие между непрерывной и дискретной по времени моделями линейного динамического объекта / В. Я. Карташов, О. Н. Инденко, А. В. Александров. – Барнаул: АлГУ, 1996. – 36 с.
3. Карташов, В. Я. Непрерывные дроби (определения и свойства): учебное пособие / В. Я. Карташов. – Кемерово: КемГУ, 1999. – 88 с.
4. Карташов, В. Я. Математическое моделирование технологических процессов: учебно-методическое пособие для магистров / В. Я. Карташов, Д. Ю. Сахнин. – Кемерово: КемГУ, 2011. – 56 с.
5. Карташов, В. Я. Эквивалентность дискретных моделей – реальность? / В. Я. Карташов // Промышленные АСУ и контроллеры. – 2006. – № 8.
6. Кочубиевский, И. Д. Системы нагружения для исследования и испытаний машин и механизмов / И. Д. Кочубиевский – М.: Машиностроение, 1985. – 221 с.
7. Острем, К. Системы управления с ЭВМ / К. Острем, Б. Виттенмарк. – М.: Мир, 1987. – 480 с.
8. Сахнин, Д. Ю. Влияние квантования на принцип эквивалентности / Д. Ю. Сахнин, М. А. Сахнина // Материалы IX Всероссийской научно-практической конференции AS'2009. – Новокузнецк, 2009.

**Информация об авторах:**

**Карташов Владимир Яковлевич** – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой автоматизации исследований и технической кибернетики, КемГУ, т. 8-905-949-2136, v.kartashov.aitek@gmail.com.



***Kartashov Vladimir Yakovlevich*** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of the Department of Research Automation and Technical Cybernetics of KemSU.

***Бехтгольд Игорь Владимирович*** – аспирант кафедры автоматизации исследований и технической кибернетики, КемГУ, т. 8-950-271-2167, [behtgold@gmail.com](mailto:behtgold@gmail.com).

***Bekhtgold Igor Vladimirovich*** – post-graduate student at the Department of Research Automation and Technical Cybernetics of KemSU.