

УДК 621.582: 536.24

## СТАБИЛИЗАЦИЯ КАРКАСА В СЛОЕ ЛЕДЯНЫХ ГРАНУЛ

П. В. Мирошников, В. В. Рагулин, В. И. Полтавцев

## STABILIZATION OF THE FRAME IN THE LAYER OF ICE PELLETS

P. V. Miroshnikov, V. V. Ragulin, V. I. Poltavtsev

Круглый ледяной гранулят служит перспективным материалом с широким спектром применения – как высоко-теплоемкий материал с постоянной температурой охлаждения химических реакторов, как средство в медицине и косметике, в пищевой технологии и т. д. Дозированное орошение слоя гранулята водой быстро превращает его в прочный ледяной каркас. В статье отражены результаты экспериментального обоснования выбора математической модели, приведены аналитическое ее решение и расчет минимального объема воды орошения.

Round ice granulate is perspective material in large field of applications – as a high-thermal material for constant temperature's cooling of chemical reactors, as a means in medicine and cosmetics, for a food industry etc. Limited sprinkle a layer of pellets with water quickly convert it into stable ice frame. In the article reflected some results of experimental basing of select of mathematic model, realized it's analytic solution and calculation of minimum quantity of the water for a sprinkle of the granulate.

**Ключевые слова:** каркас из круглого ледяного гранулята, объем воды орошения, математическая модель процесса.

**Keywords:** frame of round ice granulate, volume of the sprinkle's water, mathematic model of the process.

Преимущества использования гранулированного льда в строительстве ледовых переправ, льдохолодильников Крылова, льдобунтов и ледяных глыб в энергетике отражены в работе [1, с. 208 – 210]. Создание прочного каркаса из гранулированного льда обусловлено жгутообразованием - сцеплением соприкасающихся гранул при орошении плотно упакованного гранулята водой в дозированном объеме в результате протекающих в нем теплообменных процессов [2, с. 42 – 45]. Предварительная стабилизация каркаса необходима для предотвращения всплытия и нарушения плотностной структуры гранулята.

Для стабилизации каркаса (скелета) из гранул достаточно равномерно оросить его небольшим объемом воды (далее именуется как «минимальный объем»), определяемым экспериментально, либо расчетом.

Ниже иллюстрируются фрагменты экспериментального определения минимального объема воды орошения для быстрого создания прочного ледяного каркаса как ступени сравнения минимальных объемов орошения для гранулята и плоской ледяной плиты для обоснования выбора математической модели.

На рис. 1 изображен фрагмент эксперимента по получению (стабилизации) каркаса в слое ледяных гранул в виде композитных блоков при орошении их водой, на рис. 2 – орошение вертикальной «стенки» из гранул в один вертикальный слой («в один кирпич»). Стекающая вода подкрашена черной тушью. На рис. 3 – фрагмент орошения плоской плиты.



Рис. 1. Орошаемый гранулят льда

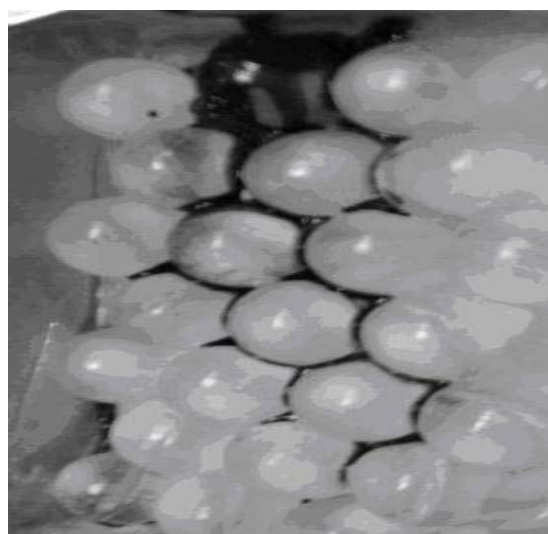


Рис. 2. Орошение вертикальной «стенки» гранул

Поскольку на практике единственный интересующий нас параметр – минимальный объем воды орошения, то многократное сравнительное повторение эксперимента позволило в первом приближении заменить реальный массив плоской вертикальной плитой с высотой, равной высоте слоя гранулята (блока) и толщиной около 70 % диаметра гранул (рис. 3). Итоговое расхождение (уменьшение) значений минимального объема орошающей воды для «стенки» в сравнении с блоком по результатам эксперимента составило 15 – 16 %, а для плоской плиты – не более 26 – 29 %.

Описание теплообменного процесса при орошении гранулята наталкивается на значительные математические трудности: в настоящее время существует лишь весьма узкий круг задач теплопроводности, допускающих аналитическое решение (цилиндр, пластина, шар, стержень и др.) [3]. Поэтому, в качестве первого приближения принята модель плоской пластины (вертикальное сечение гранулята).

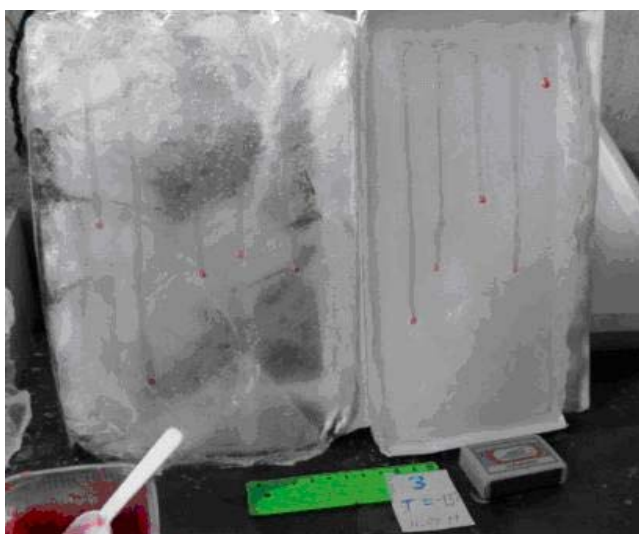


Рис. 3. Орошение плоской плиты

На рис. 4 изображена схема вертикального сечения плиты – пластины  $\Omega$  (прямоугольник  $H \times \delta$ ) со стекающей по ней водой (по оси  $OY$ ).

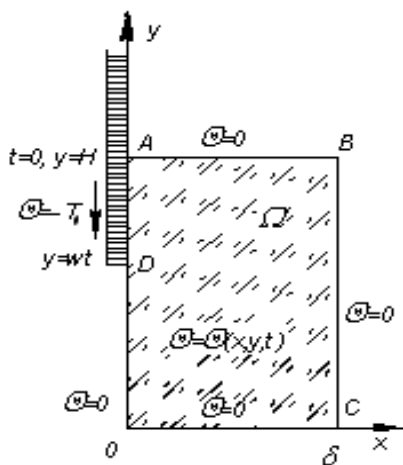


Рис. 4. Схема двумерной модели.  $\equiv$  – вода,  $\parallel$  – лед;  $y = H - wt$  – координата фронта стекающей воды (точка D);  $y = H$  – верхняя (при  $t = 0$ ) и  $y = 0$  – нижняя точки смачивания льда водой,  $t$  – время

Экспериментальное обоснование позволило математически смоделировать происходящий теплообменный процесс в следующем виде.

Пусть  $T(x, y, t)$  – температурное поле в пластине,  $T_0$  – температура среды (и начальная температура льда). Для удобства записи граничных условий введено обозначение:

$$T(x, y, t) = \theta(x, y, t) + T_0. \quad (1)$$

С допущением постоянства скорости движения фронта воды  $w$  решается следующая начально-краевая задача (задача Коши):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

$$(t > 0; 0 \leq x \leq \delta; 0 \leq y \leq H),$$

где начальное условие

$$\theta(x, y, 0) = f(x, y) = 0 \quad (3)$$

и граничные условия:

$$\theta(0, y, t) = \varphi(y, t) - T; \quad (4)$$

$$\theta(x, 0, t) = 0; \theta(x, H, t) = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\varphi(y, t)$  – кусочно-постоянная функция,

$$\varphi(y, t) = \begin{cases} -T_0, & H - wt < y < H \\ 0, & 0 < y < H - wt \end{cases}. \quad (6)$$

При условии постоянства коэффициентов теплоемкости и теплопроводности и плотности льда задача (2) – (6) решается аналитически путем совместного применения конечного синус – преобразования Фурье и формулы обращения [3], в которых учтено кусочное постоянство функции (6).

В результате для температурного поля в двухмерной пластине получим выражение:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, t) &= -\frac{4T_0}{\delta H} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a\sigma t} \sin \frac{m\pi x}{\delta} \sin \frac{n\pi y}{H} \int_0^t \int_{H-wt}^H e^{a\sigma t} \sin \frac{n\pi y}{H} dy dt = \\ &= -\frac{4T_0 a}{\delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{n} e^{-a\sigma t} \sin \frac{m\pi x}{\delta} \sin \frac{n\pi y}{H} \int_0^t \left[ (-1)^n - \cos \left( \frac{n\pi(H-wt)}{H} \right) \right] e^{a\sigma t} dt. \end{aligned} \quad (7)$$

Опуская выкладки по вычислению последнего интеграла в (7) запишем окончательно:

$$\begin{aligned} \theta(x, y, t) &= \frac{4aHT_0}{\delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n m}{n} e^{-a\sigma t} \sin \frac{m\pi x}{\delta} \sin \frac{n\pi y}{H} \times \\ &\times \left\{ H^2 \frac{e^{a\sigma t} \left[ a\sigma \cos \left( \frac{n\pi w}{H} t \right) + \frac{n\pi w}{H} \sin \left( \frac{n\pi w}{H} t \right) \right] - a\sigma}{a^2 \sigma^2 H^2 + n^2 \pi^2 w^2} - \frac{e^{a\sigma t} - 1}{a\sigma} \right\}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\sigma = a\pi^2 \left( \frac{m^2}{\delta^2} + \frac{n^2}{H^2} \right)$ .

Переход к реальным значениям температур осуществляется с помощью соотношения (1).

Зная температурное поле (8) определяем тепловой поток и минимальный объем воды, необходимый для замораживания воды орошения с образованием перемычек сцепления гранул, ледяных жгутов и жесткого каркаса.

Тепловой поток находим из соотношения:

$$\begin{aligned} 1/(\rho c) * q|_{x=0} &= -aT_x|_{x=0} = \frac{4T_0 a^2 H}{\delta^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta}{n\pi} e^{-a\sigma t} \cos \frac{m\pi x}{\delta} \sin \frac{n\pi y}{H} (-1)^n R|_{x=0} = \\ &= \frac{4T_0 a^2 H}{\delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\pi} e^{-a\sigma t} \sin \frac{n\pi y}{H} R, \end{aligned}$$

где

$$R = \frac{e^{a\sigma t} - 1}{a\sigma} - H^2 \frac{e^{a\sigma t} \left( a\sigma \cos \left( \frac{n\pi w}{H} t \right) + \frac{n\pi w}{H} \sin \left( \frac{n\pi w}{H} t \right) \right) - a\sigma}{a^2 \sigma^2 H^2 + n^2 \pi^2 w^2}. \quad (9)$$

Двухмерный поток через левую границу ОА (рис. 4) также найдем из соотношения:

$$\begin{aligned} 1/(\rho c) * Q(t) &= \int_0^H q|_{x=0} dy = \frac{4T_0 a^2 H}{\delta \pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-a\sigma t} \frac{H}{n\pi} (1 - (-1)^n) R = \\ &= \frac{4T_0 a^2 H^2}{\delta \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1 - (-1)^n)}{n^2} e^{-a\sigma t} R = \frac{4T_0 a^2 H^2}{\delta \pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} e^{-a\sigma t} R, \end{aligned}$$

где R определено выражением (9).

Количество тепла (холода)  $Q(t_*)$ , необходимое для замораживания воды на границе ОА при среднестатистическом  $t_* = 1$ с. (время пробега по ней фронта воды в эксперименте 0,7 – 1,0 с.) равно:

$$\begin{aligned} Q(t_*) &= \rho c \int_0^1 Q(t) dt = \frac{4T_0 a^2 H^2}{\delta \pi^2} \rho c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \times \\ &\times \int_0^1 \left[ \frac{1}{a\sigma} - \frac{e^{-a\sigma t}}{a\sigma} - \frac{H^2}{P_n} (a\sigma \cos(\sigma t) + \sigma \sin(\sigma t)) + \frac{H^2}{P_n} a\sigma e^{-a\sigma t} \right] dt. \end{aligned}$$

Вычисляя этот интеграл, получим:

$$Q(t_*) = \frac{4T_o a^2 H^2}{\delta \pi^2} \rho c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \left[ \frac{1}{a\sigma} + \frac{e^{-a\sigma} - 1}{a^2 \sigma^2} - \frac{H^2}{P_n} \left( \frac{a\sigma \sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi + 1 \right) - \frac{H^2}{P_n} (e^{-a\sigma} - 1) \right] =$$

$$= \frac{4T_o a^2 H^2}{\delta \pi^2} \rho c \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \left[ \frac{1}{a\sigma} - \frac{1 - e^{-a\sigma}}{a^2 \sigma^2} - \frac{H^2}{P_n} \left( \frac{a\sigma \sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi + e^{-a\sigma} \right) \right].$$

Тогда минимальный объем воды, необходимый для сцепления гранул в каркас:

$$V_{\min} = \frac{Q(t_*)}{\lambda} = \frac{4T_o a^2 H^2}{\lambda \delta \pi^2} \delta \tilde{n} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \left[ \frac{1}{\psi} - \frac{1 - e^{-\psi}}{\psi^2} - \frac{H^2}{P_n} \left( \frac{\psi \sin \varphi}{\varphi} - \cos \varphi + e^{-\psi} \right) \right],$$

$$P_n = a^2 \sigma^2 H^2 + n^2 \pi^2 w^2, \quad \sigma = \pi^2 \left( \frac{m^2}{\delta^2} + \frac{n^2}{H^2} \right), \quad \varphi = \frac{n \pi w}{H}, \quad \psi = a \sigma.$$

Здесь  $V_{\min}$  – минимальный объем воды ( $m^3$ ) на единицу площади орошаемой поверхности ( $m^2$ ),  
 $t_*$  – среднестатистическое время движения фронта воды орошения по оси Оу от  $y = H$ , до  $y = 0$ , с. (рис. 4),  
 $w$  – усредненная его скорость на этом участке, м/с,  
 $H$  – путь (полный пробег) фронта воды до подложки (высота вертикального жгута) гранулята, м,  
 $a$  – коэффициент температуропроводности, Дж/кг,  
 $\lambda$  – удельная теплота кристаллизации, Дж/кг,  
 $\delta$  – толщина плиты, м;  $\delta = 70\%$  диаметра гранул,  
 $\rho$  – плотность льда, кг/м<sup>3</sup>,  
 $c$  – теплоемкость льда, Дж/(кг К).

Составлена вычислительная программа. Числовые входные данные для расчетного примера приняты следующие:  $t_* = 1$ ;  $H = 0,1$ ;  $w = 0,1$ ;  $a = 1,33 \cdot 10^{-6}$ ;  $\delta = 0,02$ ;  $\lambda = 334 \cdot 10^3$ ;  $\pi = 3,14$ ;  $e = 2,72$ ;  $\rho = 916$ ;  $c = 2100$ ;  $T_o = -24$ .

Сравнение результатов экспериментального и расчетного объемов воды показало удовлетворительную их сходимость. При температуре льда  $-24^{\circ}\text{C}$  для образования прочного ледяного каркаса при равномерном орошении гранулята потребовался объем воды, равный приблизительно 30 % объема межгранульного пространства, то есть около 10 % объема сухого гранулята при его плотной блочной упаковке (рис. 1).

### Литература

1. Мирошников, П. В. Ледовый гранулят для речных переправ / П. В. Мирошников, В. В. Рагулин, В. И. Полтавцев // Современные проблемы и инновационные тенденции развития аграрной науки. Сб. докладов Международной научно-практической конференции (г. Якутск, 10 ноября 2010 г.). – Якутск: Сфера, 2010.
2. Мирошников, П. В. Бимерное адиабатическое смерзание сферических гранул льда / П. В. Мирошников, В. И. Полтавцев, В. В. Рагулин // Вестник международной академии холода. – СПб.; М., 2008. – Вып. 4.
3. Лыков, А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. – М.: Высш. шк., 1967. – 672 с.

### Информация об авторах:

**Мирошников Петр Владимирович** – старший преподаватель кафедры прикладной механики, КемГСХИ, 8(3842)33-18-01, [mir.pvv@mail.ru](mailto:mir.pvv@mail.ru).

**Miroshnikov Peter Vladimirovich** – Senior Lecturer at the Department of Applied Mechanics of Kemerovo State Agricultural Institute.

**Рагулин Владимир Васильевич** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений, КемГУ, 8-904-378-16-48, [ragulin@ngs.ru](mailto:ragulin@ngs.ru).

**Ragulin Vladimir Vaciliavich** – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor at the Department of Differential Equations of KemSU.

**Полтавцев Владимир Иванович** – доктор технических наук, профессор кафедры прикладной механики, КемГСХИ, 8-913-402-56-71, [determinism@rambler.ru](mailto:determinism@rambler.ru).

**Poltavtsev Vladimir Ivanovich** – Doctor of Technical Science, Professor at the Department of Applied Mechanics of Kemerovo State Agricultural Institute.