

ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПАКЕТА ПОЛИАРМИРОВАННЫХ СЛОЕВ

Ю. В. Немировский, А. В. Станиславович

THERMAL CONDUCTIVITY OF THE PACKET OF MULTIDIRECTIONAL REINFORCED LAYERS

Yu. V. Nemirovskii, A. V. Stanislavovich

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №15-01-00825.

В статье представлена структурная математическая модель теплопроводности пакета полиармированных слоев, в рамках которой построены эффективные теплофизические характеристики волокнистых композитов. Существенно новым элементом предлагаемой модели является проведение процедуры осреднения теплового потока по представительному объему двухкомпонентного композитного материала в соответствии с законом Рихмана о теплообмене, происходящем между телами, находящимися в соприкосновении, а не на основе правила простых смесей.

The paper presents a structural model of thermal conductivity of the packet of multidirectional reinforced layers, which includes effective thermal and physical characteristics of fiber composites. Significant distinction of the presented model is averaging of the rate of heat flow by representative volume element of two-component composite material using Richmann’s law of heat transfer between bodies which are in contact instead of simple mixture rule.

Ключевые слова: теплопроводность, структурная модель, волокнистый композит, армированные среды.

Keywords: thermal conductivity, structural model, fiber composite, reinforced materials.

Введение

Используемые в настоящее время волокнистые композитные конструкции армируются, как правило, не одним, а несколькими семействами волокон различной ориентации и во многих случаях различной физической природы. Это является следствием требований, предъявляемых к прочностным характеристикам таких материалов: в армированных оболочках и пластинах несущие элементы – волокна – должны воспринимать соизмеримые напряжения на площадках, различно ориентированных по двум направлениям [17].

Разработке структурной модели теплопроводности пакета полиармированных слоев посвящена настоящая работа. Существенно новым элементом предлагаемой модели является проведение процедуры осреднения температуры и теплового потока по представительному объему двухкомпонентного композитного материала с использованием закона Рихмана о теплообмене соприкасающихся тел [11; 21].

Далее в работе под полиармированным слоем (ПАС) будем понимать слой, толщина h_i^* которого сравнима с толщиной пакета ПАС H . Представительный элемент ПАС представлен на рис. 1. Под однонаправленно армированным слоем (ОАС) будем понимать слой, толщина которого много меньше толщины пакета ПАС, под толщиной ОАС будем понимать $h^{(k)}$. Представительный элемент ОАС представлен на рис. 2.

1. Структурная модель теплопроводности однонаправленно армированного слоя

Переходим к изложению структурной модели теплопроводности однонаправленно армированного слоя. Изложение структурной модели теплопроводности однонаправленно армированных волокнистых композитов здесь следует, в основном, материалам монографий [3; 17], а также статьи [2]. Принимаются следующие допущения [1 – 3; 14 – 18; 22].

1. Число армирующих волокон достаточно велико, поэтому полиармированный слой можно считать макроскопически квазиоднородным анизотропным телом [2; 3; 17].

2. Материал полиармированного слоя получен путем внедрения в однородное и изотропное связующее регулярной сети однонаправленных трансверсально изотропных волокон. Причем главная ось анизотропии совпадает с направлением армирования. Армирующие волокна принимаются прямоугольными в поперечном сечении [2; 3]. Связь между вектором теплового потока и градиентом температуры в обеих фазах композиции подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье [7; 19]:

$$\Theta_n = -\lambda_n \nabla T_n, \tag{1.1}$$

где Θ_n, λ_n, T_n – вектор теплового потока, коэффициент линейной теплопроводности и температура связующего ($n = \langle c \rangle$) и арматуры ($n = \langle a \rangle$) соответственно, ∇ – оператор Гамильтона.

3. Градиенты внешних силовых и тепловых полей «не слишком велики». Поэтому изменением характеристик теплового поля в пределах представительного объема можно пренебречь [2; 3].

4. На границе между связующим и арматурой реализуются условия идеального теплового контакта.

5. Осреднение температуры по представительному объему двухкомпонентного композитного материала выполняется в соответствии с законом Г. В. Рихмана [11; 21]:

$$T = \frac{c_1 m_1}{c_1 m_1 + c_2 m_2} T_1 + \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} T_2. \tag{1.2}$$

Здесь T – конечная температура двух соприкасающихся тел, $c_1, m_1, T_1, c_2, m_2, T_2$ – удельная массовая теплоемкость, масса, температура первого и второго тел соответственно.

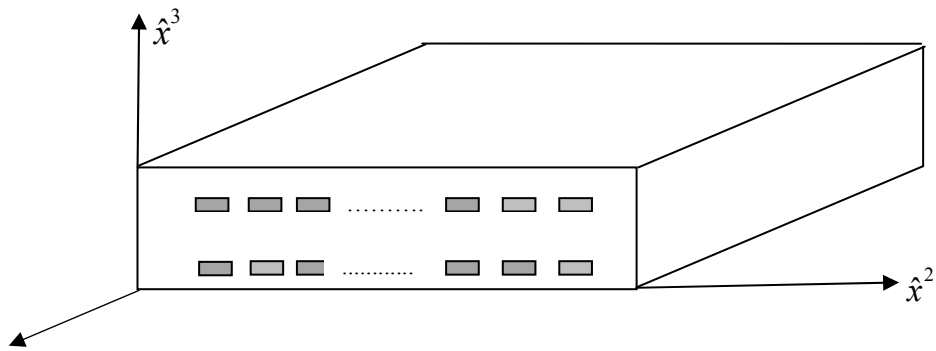


Рис. 1. Представительный элемент полиармированного слоя

6. Осреднение по представительному объему вектора плотности теплового потока выполняется по правилу, аналогичному (1.2) [2; 3]:

$$\Theta = \frac{c_1 m_1}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \Theta_1 + \frac{c_2 m_2}{c_1 m_1 + c_2 m_2} \Theta_2. \quad (1.3)$$

7. Связь между осредненным по представительному объему вектором теплового потока и температурой подчиняется закону теплопроводности Фурье для анизотропной среды [7]: $\Theta_i = \Lambda_{ij} \nabla_j T$.

Здесь Λ – тензор интегральных коэффициентов теплопроводности.

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности армированной среды. Формулами: $\omega = d/l$, $\omega_z = \delta/h$ (рис. 2) вводим па-

раметры армирования – интенсивность армирования в плоскости слоя (ω) и по его высоте (ω_z). Оси прямоугольной декартовой системы координат $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 = z$ направим, как показано на рис. 2.

Плоскостями $AA'D'D$ и $BB'C'C$, параллельными плоскостям слоя (рис. 2, 3), выделим из представительного элемента армированной среды параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$. Этот параллелепипед, содержащий армирующее волокно (закрашено серым), назовем представительным элементом армирующего слоя (рис. 3) и сначала найдем его средние характеристики [2; 3].

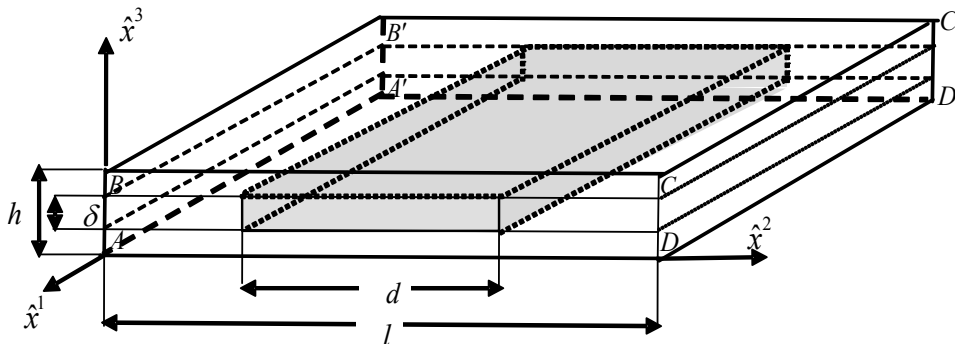


Рис. 2. Представительный элемент армированного слоя

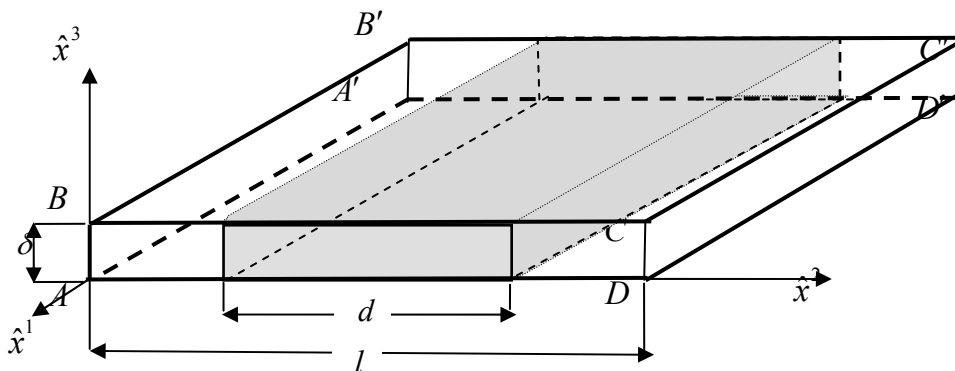


Рис. 3. Представительный элемент армирующего слоя

Величины, относящиеся к связующему, будем отмечать индексом «с», к арматуре – индексом «а».

Приведенную объемную плотность $\langle \rho \rangle$, массовую $\langle c_{\varepsilon m} \rangle$ и объемную $\langle c_{\varepsilon} \rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армирующего слоя определим по формулам [2; 3]:

$$\langle \rho \rangle = \omega \rho_a + (1 - \omega) \rho_c, \quad (1.4)$$

$$\langle c_{\varepsilon m} \rangle = \frac{\omega \rho_a}{\langle \rho \rangle} c_{\varepsilon m}^a + \frac{(1 - \omega) \rho_c}{\langle \rho \rangle} c_{\varepsilon m}^c, \\ \langle c_{\varepsilon} \rangle = \omega \rho_a c_{\varepsilon}^a + (1 - \omega) \rho_c c_{\varepsilon}^c. \quad (1.5)$$

Здесь и далее в параграфе в угловых скобках – величины, осредненные по объему представительного элемента армирующего слоя, $\rho_n, c_{\varepsilon}^n, c_{\varepsilon m}^n$ – объемная плотность, удельная объемная и массовая теплоемкость арматуры ($n = \langle a \rangle$) и связующего ($n = \langle c \rangle$).

Используя характеристики (1.5) из (1.2), (1.3) выводим:

$$\nabla \langle T \rangle = \bar{\omega} \nabla T_a + (1 - \bar{\omega}) \nabla T_c, \\ \langle \Theta \rangle = \bar{\omega} \Theta_a + (1 - \bar{\omega}) \Theta_c, \quad (1.6) \\ \bar{\omega} = \frac{c_{\varepsilon}^a}{\langle c_{\varepsilon} \rangle} \omega.$$

Записывая (1.6) в скалярной форме и учитывая (1.1), получаем зависимости:

$$\nabla_i \langle T \rangle = \bar{\omega} \nabla_i T_a + (1 - \bar{\omega}) \nabla_i T_c \quad (i = 1, 2, 3), \quad (1.7)$$

$$\nabla_1 T_c = \nabla_1 T_a = \nabla_1 \langle T \rangle, \quad \nabla_3 T_c = \nabla_3 T_a = \nabla_3 \langle T \rangle, \\ \nabla_2 T_c = \frac{\lambda_{a2}}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}} \nabla_2 \langle T \rangle, \quad \nabla_2 T_a = \frac{\lambda_c}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}} \nabla_2 \langle T \rangle. \quad (1.12)$$

Подставляя (1.12) в (1.8), приходим к соотношениям:

$$\Theta_1 = -[\bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c] \nabla_1 \langle T \rangle, \quad \Theta_2 = -\frac{\lambda_{a2} \lambda_c}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}} \nabla_2 \langle T \rangle, \\ \Theta_3 = -[\omega \lambda_{a2} + (1 - \omega) \lambda_c] \nabla_3 \langle T \rangle. \quad (1.13)$$

Сравнивая (1.13) с (1.9), находим:

$$\langle \Lambda_{11} \rangle = \bar{\omega} \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{22} \rangle = \frac{\lambda_{a2} \lambda_c}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}}, \\ \langle \Lambda_{33} \rangle = \bar{\omega} \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c, \quad \langle \Lambda_{ij} \rangle = 0 \quad (i = 1, 2, 3; i \neq j). \quad (1.14)$$

Переходим к определению компонент тензора линейной теплопроводности представительного элемента армированного слоя. В силу допущений 1, 7 считаем, что квазиоднородный анизотропный материал элементарного армирующего слоя (на рис. 2 – прямоугольный параллелепипед $ABCD A' B' C' D'$) подчиняется закону Фурье для анизотропных сред (1.9),

$$\langle \Theta_1 \rangle = -[\bar{\omega} \lambda_{a1} \nabla_1 T_a + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c \nabla_1 T_c], \quad (1.8)$$

$$\langle \Theta_i \rangle = -[\bar{\omega} \lambda_{a2} \nabla_i T_a + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c \nabla_i T_c] \quad (i = 2, 3)$$

Здесь $\lambda_{a1}, \lambda_{a2}$ – коэффициенты линейной теплопроводности арматуры в продольном и поперечном направлениях соответственно.

В силу допущения 7 имеем:

$$\langle \Theta_i \rangle = -\langle \Lambda_{ij} \rangle \nabla_j \langle T \rangle. \quad (1.9)$$

Здесь $\langle \Lambda \rangle$ – неизвестный тензор интегральных коэффициентов теплопроводности армирующего слоя. Для его определения необходимо найти линейную зависимость величин $\langle \Theta_i \rangle$ в (1.8) от $\nabla_i \langle T \rangle$ в (1.7).

В силу допущения 4 на поверхности Γ раздела фаз арматуры и связующего (рис. 3) выполнены условия идеального контакта по температуре [4; 10]:

$$T_a = T_c, \quad \lambda_a \nabla_2 T_a = \lambda_c \nabla_2 T_c \quad (1.10)$$

(направление нормали совпадает с направлением оси Ox^2).

Дифференцируя обе части первого из равенств (1.10) по \hat{x}^1, \hat{x}^3 , приходим к соотношениям:

$$\nabla_1 T_a = \nabla_1 T_c, \quad \nabla_3 T_a = \nabla_3 T_c, \\ \lambda_a \nabla_2 T_a = \lambda_c \nabla_2 T_c. \quad (1.11)$$

Зависимости (1.7), (1.11) вместе составляют систему шести линейных алгебраических уравнений для определения шести величин – $\nabla_1 T_a, \nabla_2 T_a, \nabla_3 T_a, \nabla_1 T_c, \nabla_2 T_c, \nabla_3 T_c$.

Решив систему (1.7), (1.11), получаем:

(1.14), а материал прослоек связующего, дополняющего этот параллелепипед до представительного элемента армированного слоя, подчиняется линейному закону теплопроводности Фурье (1.1). Поверхность Γ раздела фаз состоит из прямоугольников $AA' D' D$ и $BB' C' C$ [2; 3].

Приведенную объемную плотность, массовую $\langle\langle c_{эм} \rangle\rangle$ и объемную $\langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle$ теплоемкость квазиоднородного вещества представительного элемента армированного слоя определим по формулам [2; 3]:

$$\langle\langle \rho \rangle\rangle = \omega_z \langle \rho \rangle + (1 - \omega_z) \rho_c, \quad (1.15)$$

$$\langle\langle c_{эм} \rangle\rangle = \frac{\omega_z \langle \rho \rangle}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} \langle c_{эм} \rangle + \frac{(1 - \omega_z) \rho_c}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} c_{эм}^c. \quad (1.16)$$

$$\begin{aligned} \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle &= \bar{\omega}_z \nabla_1 \langle T \rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \nabla_1 T_c, & \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle &= \bar{\omega}_z \nabla_2 \langle T \rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \nabla_2 T_c, \\ \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle &= \bar{\omega}_z \nabla_3 \langle T \rangle + (1 - \bar{\omega}_z) \nabla_3 T_c, & \bar{\omega}_z &= \frac{\langle c_\varepsilon \rangle}{\langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle} \omega_z. \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = -\bar{\omega}_z \langle \Lambda_{ii} \rangle \nabla_i \langle T \rangle - (1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c \nabla_i T_c. \quad (1.18)$$

В силу допущения 7 имеем:

$$\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle = -\hat{\Lambda}_{ij} \nabla_j \langle\langle T \rangle\rangle. \quad (1.19)$$

Здесь $\hat{\Lambda}$ – тензор интегральных коэффициентов теплопроводности армированного слоя. Для его опре-

$$\langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle = \omega_z \langle \rho \rangle \langle c_{эм} \rangle + (1 - \omega_z) \rho_c c_{эм}^c.$$

Здесь и далее в параграфе в двойных угловых скобках – величины, осредненные по объему представительного элемента армированного слоя.

Из соотношений (1.2), (1.3) с учетом (1.1), (1.9), (1.14), (1.16) следует:

деления, также как и выше, необходимо найти линейную зависимость величин $\langle\langle \Theta_i \rangle\rangle$ от $\nabla_i \langle\langle T \rangle\rangle$.

Повторяя рассуждения (1.10) – (1.13) почти дословно приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Theta_1 \rangle\rangle &= -[\bar{\omega} \bar{\omega}_z \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega} \bar{\omega}_z) \lambda_c] \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle, \\ \langle\langle \Theta_2 \rangle\rangle &= -\lambda_c \frac{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)) \lambda_{a2}}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}} \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle, \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$\langle\langle \Theta_3 \rangle\rangle = -\lambda_c \frac{\bar{\omega} \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c}{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z) \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)) \lambda_c} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle.$$

Сравнивая между собой (1.19) и (1.20) приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}_{11} &= \bar{\omega} \bar{\omega}_z \lambda_{a1} + (1 - \bar{\omega} \bar{\omega}_z) \lambda_c, & \hat{\Lambda}_{22} &= \lambda_c \frac{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z) \lambda_c + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)) \lambda_{a2}}{\bar{\omega} \lambda_c + (1 - \bar{\omega}) \lambda_{a2}}, \\ \hat{\Lambda}_{33} &= \lambda_c \frac{\bar{\omega} \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}) \lambda_c}{\bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z) \lambda_{a2} + (1 - \bar{\omega}(1 - \bar{\omega}_z)) \lambda_c}, & \hat{\Lambda}_{ij} &= 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Формулами (1.21) компоненты тензора теплопроводности определены во вспомогательной декартовой системе координат $\hat{x}^1, \hat{x}^2, \hat{x}^3 = z$, направление оси

$O\hat{x}^1$ которой совпадает с направлением армирования. В любой другой координатной системе компоненты этого тензора можно получить, используя формулы преобразования компонент тензоров. Пусть, например, система координат \hat{x}^1, \hat{x}^2 получена из системы координат x^1, x^2 путем поворота на угол φ . Тогда:

$$\begin{aligned} \hat{x}^1 &= x^1 \cos \varphi + x^2 \sin \varphi, \\ \hat{x}^2 &= -x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^1 &= \hat{x}^1 \cos \varphi - \hat{x}^2 \sin \varphi, \\ x^2 &= \hat{x}^1 \sin \varphi + \hat{x}^2 \cos \varphi. \end{aligned}$$

Отсюда из формул преобразования компонент тензоров следует [3]:

$$\Lambda_{\lambda\mu} = \hat{\Lambda}_{\alpha\beta} m_\lambda^\alpha m_\mu^\beta, \quad (1.22)$$

где $m_1^1 = m_2^2 = \cos \varphi$, $m_2^1 = -m_1^2 = \sin \varphi$.

2. Структурная модель теплопроводности пакета полиармированных слоев Equation Section (Next).

Переходим к построению структурной модели теплопроводности пакета полиармированных слоев.

Для вывода эффективных коэффициентов теплопроводности пакета ПАС с квазирегулярной по толщине пакета структурой, образованной путем перио-

дического и многократного чередования ОАС с различными семействами волокон, примем следующие допущения [5; 17].

1. Материал пакета ПАС получен путем наложения друг на друга N семейств ОАС.

2. Направление армирования i -м семейством волокон в ОАС параллельно плоскости Ox^1x^2 прямоугольной декартовой системы координат и составляет с направлением оси Ox^1 угол φ_i ($i = 1, 2, \dots, N$).

3. Для каждого ОАС остаются справедливыми предположения 1 – 7 параграфа 1.

4. На границах между ОАС задаются условия идеального теплового контакта [4; 10]:

$$\begin{aligned} \langle\langle T \rangle\rangle^{(i)} &= \langle\langle T \rangle\rangle^{(i+1)}, \\ \Lambda_{33}^{(k)} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(i)} &= \Lambda_{33}^{(k+1)} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(i+1)}, \\ i &= 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

5. Число ОАС достаточно велико, так что пакет ПАС можно считать макроскопически квазиоднородным анизотропным телом, одна из главных осей анизотропии которого совпадает с направлением оси Ox^3 .

6. Допущения 5 – 6 параграфа 1 остаются справедливыми для всего пакета ПАС в целом, где под фазой композиции будем понимать ОАС. Формулы (1.2), (1.3) для случая N тел преобразуются следующим образом [11]:

$$T = \sum_i \left[\left(\sum_j c_j m_j \right)^{-1} c_i m_i T_i \right] \quad (2.1)$$

$$\Theta = \sum_i \left[\left(\sum_j c_j m_j \right)^{-1} c_i m_i \Theta_i \right], \quad (2.2)$$

где c_i , m_i , T_i , Θ_i , так же как и в первом параграфе, – удельная массовая теплоемкость, масса, температура, вектор плотности теплового потока для i -го тела соответственно. Здесь и далее (если не указаны пределы суммирования) суммирование ведется от единицы до N .

Для определения эффективных коэффициентов теплопроводности пакета необходимо установить

$$\begin{aligned} \langle\langle \Theta_i \rangle\rangle &= - \left[\sum_k \bar{\Omega}_k \Lambda_{i1}^{(k)} \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} + \sum_k \bar{\Omega}_k \Lambda_{i2}^{(k)} \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} \right], \quad i = 1, 2, \\ \langle\langle \Theta_3 \rangle\rangle &= - \sum_k \bar{\Omega}_k \Lambda_{33}^{(k)} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $\bar{\Omega}_i = \frac{\langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle^{(i)}}{\langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle} \Omega_i$, а $\Lambda^{(k)}$ – тензор интегральных

коэффициентов теплопроводности ОАС с k -м семей-

ством волокон. Причем также выполняется условие нормировки $\sum_i \bar{\Omega}_i = 1$.

Приведенную объемную плотность $\langle\langle \rho \rangle\rangle$ пакета ПАС определяем по формуле, аналогичной (1.4), (1.15):

$$\begin{aligned} \langle\langle \rho \rangle\rangle &= \Omega_1 \langle\langle \rho \rangle\rangle^{(1)} + \Omega_2 \langle\langle \rho \rangle\rangle^{(2)} + \dots \\ &+ \Omega_N \langle\langle \rho \rangle\rangle^{(N)} = \sum_i \Omega_i \langle\langle \rho \rangle\rangle^{(i)}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\Omega_i = \frac{h_i}{H}$ – удельное содержание ОАС с i -м семей-

ством волокон в пакете ПАС, h_i – суммарная толщина ОАС с i -м семейством волокон, H – толщина пакета

ПАС, $\langle\langle \rho \rangle\rangle^{(i)}$ – осредненная объемная плотность

ОАС с i -м семейством волокон. Здесь и далее в угловых скобках с индексом сверху будем обозначать величины, осредненные по объему ОАС с i -м семейством волокон, а в двойных угловых скобках без индекса – величины, осредненные по всему пакету ПАС. Выполняются следующие условия нормировки:

$$\sum_i h_i = H, \quad \sum_i \Omega_i = 1 \quad (\Omega_i > 0).$$

Приведенную массовую $\langle\langle c_{em} \rangle\rangle$ и объемную $\langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle$ теплоемкости для всего пакета ПАС найдем по формулам:

$$\begin{aligned} \langle\langle c_{em} \rangle\rangle &= \frac{1}{\langle\langle \rho \rangle\rangle} \sum_i \Omega_i \langle\langle \rho \rangle\rangle^{(i)} \langle\langle c_{em} \rangle\rangle^{(i)}, \\ \langle\langle c_\varepsilon \rangle\rangle &= \sum_i \Omega_i \langle\langle \rho \rangle\rangle^{(i)} \langle\langle c_{em} \rangle\rangle^{(i)}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из выражений (2.1), (2.2), использованных для осреднения температуры и вектора плотности теплового потока для пакета ПАС, с учетом характеристик (2.4) и закона теплопроводности Фурье (1.19), получим:

$$\nabla_i \langle\langle T \rangle\rangle = \sum_j \bar{\Omega}_j \nabla_j \langle\langle T \rangle\rangle^{(j)}, \quad (2.5)$$

ством волокон. Причем также выполняется условие нормировки $\sum_i \bar{\Omega}_i = 1$.

Компоненты тензора интегральных коэффициентов теплопроводности ОАС с k -м семейством волокон $\Lambda_{ij}^{(k)}$ получаются из (1.21) с учетом (1.22):

$$\Lambda_{ij}^{(k)} = m_{1i}^{(k)} m_{1j}^{(k)} \hat{\Lambda}_{11}^{(k)} + (-1)^{i+j} m_{2i}^{(k)} m_{2j}^{(k)} \hat{\Lambda}_{22}^{(k)},$$

$$m_{11}^{(k)} = m_{22}^{(k)} = \cos \varphi_k, \quad m_{12}^{(k)} = m_{21}^{(k)} = \sin \varphi_k, \quad i, j = 1, 2, \quad \Lambda_{33}^{(k)} = \hat{\Lambda}_{33}^{(k)}, \quad (2.7)$$

$\hat{\Lambda}_{ii}^{(k)}$ ($i = 1, 2, 3$) задаются формулами (1.21).

В силу допущения 4 на поверхностях Γ_{km} контакта между ОАС с k -м и m -м семействами волокон выполнены условия идеального теплового контакта:

$$\langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} \Big|_{km} = \langle\langle T \rangle\rangle^{(m)} \Big|_{km}, \quad (2.8)$$

$$\Lambda_{33}^{(k)} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} \Big|_{km} = \Lambda_{33}^{(m)} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(m)} \Big|_{km}, \quad (2.9)$$

$k, m = 1, 2, \dots, N, \quad k \neq m$

В связи с тем, что пакет ПАС представляет собой сплошное макроскопически квазиоднородное анизотропное тело, одна из главных осей анизотропии которого совпадает с осью Ox^3 и тем, что ОАС имеет элементарную толщину соотношения (2.8), (2.9) можно заменить эквивалентной системой равенств:

$$\langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} = \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)}, \quad (2.10)$$

$$\Lambda_{33}^{(k)} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} = \Lambda_{33}^{(1)} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)}, \quad (2.11)$$

$k = 2, 3, \dots, N$

Дифференцируя обе части равенства (2.10) по x^l, x^2 , приходим к соотношениям:

$$\begin{aligned} \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} &= \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)}, \\ \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} &= \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)}, \\ \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} \Lambda_{33}^{(k)} &= \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)} \Lambda_{33}^{(1)}, \\ k &= 2, 3, \dots, N \end{aligned} \quad (2.12)$$

Зависимости (2.5), (2.12) вместе составляют систему $3N$ линейных алгебраических уравнений для определения $3N$ неизвестных величин

$$\nabla_i \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} \quad (i = 1, 2, 3; k = 1, 2, \dots, N).$$

Решая систему, получаем:

$$\nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle = \sum_i \bar{\Omega}_i \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle^{(i)} = \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)}, \quad (2.13)$$

$$\nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle = \sum_i \bar{\Omega}_i \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle^{(i)} = \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)}$$

Из последнего из равенств (2.12) следует:

$$\nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(k)} = \frac{\Lambda_{33}^{(1)}}{\Lambda_{33}^{(k)}} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)}. \quad (2.14)$$

Подставив (2.14) в (2.5) получим:

$$\nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle = \sum_i \left(\bar{\Omega}_i \frac{\Lambda_{33}^{(1)}}{\Lambda_{33}^{(i)}} \right) \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle^{(1)}. \quad (2.15)$$

Подставляя (2.13), (2.14) в (2.6) и учитывая (2.15), получаем:

$$\begin{aligned} \langle\langle \Theta_1 \rangle\rangle &= - \left(\sum_i \bar{\Omega}_i \Lambda_{11}^{(i)} \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle + \sum_i \bar{\Omega}_i \Lambda_{12}^{(i)} \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle \right), \\ \langle\langle \Theta_2 \rangle\rangle &= - \left(\sum_i \bar{\Omega}_i \Lambda_{21}^{(i)} \nabla_1 \langle\langle T \rangle\rangle + \sum_i \bar{\Omega}_i \Lambda_{22}^{(i)} \nabla_2 \langle\langle T \rangle\rangle \right), \\ \langle\langle \Theta_3 \rangle\rangle &= - \left(\sum_i \frac{\bar{\Omega}_i}{\Lambda_{33}^{(i)}} \right)^{-1} \nabla_3 \langle\langle T \rangle\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Сравнивая равенства (2.16) с (1.19), получаем:

$$\Lambda_{ij} = \sum_k \bar{\Omega}_k \Lambda_{ij}^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, \quad \Lambda_{33} = \left(\sum_k \frac{\bar{\Omega}_k}{\Lambda_{33}^{(k)}} \right)^{-1}. \quad (2.17)$$

Литература

1. Андреев А. Н., Немировский Ю. В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины: изгиб, устойчивость, колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 288 с.
2. Андреев А. Н. Моделирование процессов теплопроводности в однонаправлено армированных композитных средах // Вестник КемГУ. 2015. № 2(62). Т. 1. С. 6 – 10.
3. Андреев А. Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа. Saarbrücken, Deutschland: Palmarium Academic Publishing, 2013. 93 с.

4. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517 с.
5. Горынин Г. Л., Немировский Ю. В. Математическое моделирование процесса теплопроводности для 2D-периодических композитных анизотропных материалов // Математические методы и физико-механические поля. 2014. Т. 57. № 2. С. 142 – 151.
6. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 487 с.
7. Карташов Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел: учебное пособие. 3-е изд., перераб и доп. М.: Высш. шк., 2001. 550 с.
8. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. Киев: Наукова думка, 1970. 308 с.
9. Коваленко А. Д. Термоупругость. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
10. Коляно Ю. М., Ломакин В. А., Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры. М.: Наука, 1984. 368 с.
11. Кухлинг Х. Справочник по физике. М.: Мир, 1985. 520 с.
12. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
13. Мелан Э., Паркус Г. Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. М.: ГИФМЛ, 1958. 166 с.
14. Немировский Ю. В. К теории термоупругого изгиба армированных оболочек и пластин // Мех. полимеров. 1972. № 5. С. 861 – 873.
15. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в ортогонально армированных гибридных композитах с дисперсным упрочнением связующего // Прикладная физика. 2008. № 5. С. 10 – 17.
16. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
17. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. Новосибирск: Арт-Авеню, 2008. 512 с.
18. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композитных материалов и конструкций. 2007. Т. 13. № 1. С. 3 – 32.
19. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
20. Паркус Г. Неустановившиеся температурные напряжения. М.: ГИФМЛ, 1963. 252 с.
21. Поль Р. В. Механика, акустика и учение о теплоте. М.: ГИТТЛ, 1957. 479 с.
22. Янковский А. П. Моделирование процессов теплопроводности в пространственно армированных композитах с произвольной ориентацией волокон // Прикладная физика. 2011. № 3. С. 32 – 39.

Информация об авторах:

Немировский Юрий Владимирович – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН, nemirov@itam.nsc.ru.

Yury V. Nemirovskii – Doctor of Physics and Mathematics, Leading Research Associate at Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch of the RAS.

Станиславович Алексей Вячеславович – программист «ПКП РИФ», соискатель кафедры алгебры и геометрии КемГУ, alexey.st@bk.ru.

Alexey V. Stanislavovich – post-graduate student at the Department of Algebra and Geometry, Kemerovo State University.

Статья поступила в редколлегию 21.09.2015 г.